

基于圆形窗口的简单多边形裁剪算法*

杜玉越 曹德范

(聊城师范学院计算机科学系, 山东 252059)

摘要 提出了一种新颖而实用的圆形窗口 V 对多边形 P 的裁剪算法。它将多边形 P 的边视为有向线段, 通过引入多边形顶点的入边和出边交点的概念, 深入研究了 P 被 V 裁剪后的区域确定问题, 给出了作出 P 在 V 内部分的定理。

关键词 图形学, 圆形窗口, 多边形, 裁剪

1 引言

在计算机图形处理系统中, 多边形裁剪是一项经常性操作。对于矩形窗口的多边形裁剪, 已出现了许多有效算法^[1~3], 如著名的 Sutherland-Hodgman 算法和 Weiler-Atherton 算法, 它们在图形处理中得到广泛的应用。但在实际问题中, 也常常使用圆形窗口, 如对实体图形的局部进行放大处理等。因此, 对圆形窗口裁剪问题的研究, 逐步得到人们的重视^[4]。

本文深入研究并提出了圆形窗口 V 对简单多边形 P 的裁剪算法, 论述了 P 被 V 裁剪后封闭区域的确定问题。该算法通过 P 的边与圆形窗口 V 相交的数学模型, 得到参数 t 的判别式, 进而由判别式确定 P 的边是否与 V 相交。当存在交点时, 由参数 t 求出交点, 并确定交点的性质。

2 算法思想

设简单多边形 $P = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ 的顶点用笛卡尔坐标描述, 即 $p_i = p(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n-1$, 并按顺时针方向列出。不妨设圆形窗口 V 的圆心在坐标系原点, 半径为 $R > 0$ 。

设 p_i, p_j 为平面上任意两点, 用 $\overrightarrow{p_i p_j}$ 表示具有从 p_i 到 p_j 方向的有向线段。

定义 1 设 p_i 为简单多边形 P 的顶点, 称 $\overrightarrow{p_{i-1} p_i}$

($p_{-1} = p_{n-1}$) 为顶点 p_i 的入边, 而 $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$ ($p_n = p_0$) 为顶点 p_i 的出边。

显然, 对 P 的任一顶点, 均存在一条入边和一条出边。

定义 2 设 P 的顶点 p_i 在圆形窗口 V 之外(在 V 边线上的顶点被视为在 V 外), 且入、出两边至少有一条边与 V 相交(与 V 相切的边被视为在 V 外)。

若其入边 $\overrightarrow{p_{i-1} p_i}$ 与 V 相交, 则称距 p_i 最近的交点为其入边交点, 记为 $p_{i\text{出}}$; 若其出边 $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$ 与 V 相交, 则称距 p_i 最近的交点为其出边交点, 记为 $p_{i\text{入}}$ 。如图 1 所示。

由定义 2, 若从简单多边形 P 的某顶点(如 p_0) 出发, 按顺时针方向实施 P 被 V 裁剪, 并依次记录 P 在 V 内的顶点和 P 与 V 的交点, 当再回到始点时, 将形成 P 的一个新顶点序列(交点也视为顶点), 记为 P' , 称 P' 为 P 的新顶点表。因此, P' 由 P 在 V 内顶点和 P 在 V 外顶点的入、出边与 V 的交点组成, 且沿 P 边线按顺时针方向排列。在图 1 中, P' 为 $p_1 \wedge p_2 p_3 \text{出} p_3 \wedge p_4 p_5 p_6 \text{出} p_6 \wedge p_0 \text{出}$ 。

于是, 根据 P' 的形成过程, 由定义 2 及图 1, 容易证明下述结论成立。

定理 1 若 P' 非空, 则将 P' 中各顶点用直线顺序连接并闭合(即首尾顶点亦连接), 但其间遇 $p_{i\text{出}}$ ($0 \leq i \leq n-1$) 时, 不与其后序顶点相连, 所得图形是 P

* 山东省自然科学基金资助课题

收稿日期: 1997-12-01; 收到修改稿日期: 1998-03-16

在 V 内的部分。

由定理 1 可作出 P 在 V 内的部分,若要作出 P 被 V 裁剪后的封闭区域,尚需确定 P' 中 $p_{i出}$ 与 $(0 \leq i \leq n-1)$ 与其后序顶点如 $p_{j入}$ 之间裁剪区域的边界。若简单地将 $p_{i出}$ 与 $p_{j入}$ 用 V 的边线相连,则产生错误的连接。如图 2 所示, $p_{1出}$ 的后序顶点为 $p_{1入}$,但圆弧 $\widehat{p_{1入}p_{1出}}$ 不是裁剪区域边界, $p_{1出}p_{1入}$ 故圆弧也不是裁剪区域边界。为此,引入交点子集的概念。

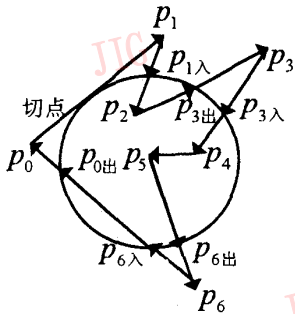


图 1

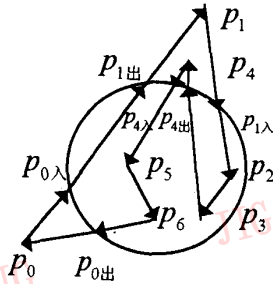


图 2

定义 3 设 (x, y) 为简单多边形 P 与圆形窗口 V 的交点。若 $x < 0$, 则称 (x, y) 为左交点, 由左交点组成的集合记为 $P_{交左}$; 反之, 称 (x, y) 为右交点, 由右交点组成的集合记为 $P_{交右}$ 。

由定义 3, 可将 P' 中 P 与 V 的交点分成 2 个交点子集 $P_{交左}$ 和 $P_{交右}$ 。现在 $P_{交左}$ 中, 将各顶点按 y 值由小到大排列; 而在 $P_{交右}$ 中, 将各顶点按 y 值由大到小排列, 然后将 $P_{交左}$ 与 $P_{交右}$ 顺序组合在一起, 即 $P_{交左}$ 在前, $P_{交右}$ 在后, 形成一个新的交点集合, 记为 $P_{交}$, 则 $P_{交}$ 中的点就是 P 与 V 所有交点沿 V 边线的顺时针方向排列。在图 2 中, $P_{交}$ 为 $p_{0出}p_{0入}p_{1出}p_{4入}p_{4出}p_{1入}$ 。

显然, 若 P' 非空, 但 $P_{交}$ 空, 则 V 包含 P , P' 中的

$$\delta_{i,i+1} = \begin{cases} \alpha(p_{i+1}) - \alpha(p_i) & \\ \alpha(p_{i+1}) - \alpha(p_i) - 4 & \\ \alpha(p_{i+1}) - \alpha(p_i) + 4 & \\ [\alpha(p_{i+1}) - \alpha(A)] + [\alpha(A) - \alpha(p_i)] & \end{cases}$$

式中 A 点为边 $\widehat{p_i p_{i+1}}$ 与 x 或 y 坐标轴的交点中不属于 p_i 或 p_{i+1} 所在象限的一个交点。若 $W = 0$, 则 V 的圆心在 P 外, P 与 V 没有公共区域; 否则 V 的圆心在 P 内, P 包含 V 。于是得到如下结论。

定理 3 当 P' 空时, 若 $W \neq 0$, 则 P 被 V 裁剪后的区域为 V ; 否则, P 被 V 裁剪后的区域为空。

点是 P 的所有顶点。此时, 由定理 1 形成的边界, 即为 P 被 V 裁剪后的区域边界。而 $P_{交}$ 非空时, 有如下结论。

定理 2 若 $P_{交}$ 非空, 则 P 被 V 裁剪后的封闭区域在 V 边线上的边界, 将由 $P_{交}$ 中的点按如下规则形成: 若 $P_{交}$ 中的第一点为 $p_{i出}(0 \leq i \leq n-1)$, 则自该点起, 将 $P_{交}$ 中的交点按顺时针方向两两用 V 的边线相连; 否则, 自该点起, 按逆时针方向两两用 V 的边线相连并闭合 (即首尾两点亦用 V 的边线相连)。

证明: 由于 $P_{交}$ 中的点是沿 V 边线按顺时针方向排列的 P 与 V 的全部交点, 根据 P' 的形成过程, 若 P' 中某顶点为 $p_{i出}(0 \leq i \leq n-1)$, 则 P 自 $p_{i出}$ 穿出 V 外, 无论 P 在 V 外经过多少顶点, 走向如何, 最终将在 $p_{j入}(0 \leq j \leq n-1)$ 点进入 V 内, 即 P 与 V 的入边交点必与出边交点成对出现, 故若 $P_{交}$ 中某点为入边交点, 则其前、后序顶点必为出边交点。又因 P 沿 $p_{i出}$ 到 $p_{j入}$ 的路径必在 V 外, 所以仅 $p_{i出}$ 与其后序顶点相连的圆弧在 P 内, 将 $P_{交}$ 中的所有 $p_{i出}$ 与其后的 $p_{j入}$ 用 V 边线相连, 即为 P 被 V 裁剪后区域在 V 边线上的边界。如图 2 中的圆弧 $\widehat{p_{0出}p_{0入}}, \widehat{p_{1出}p_{4入}}, \widehat{p_{4出}p_{1入}}$, 证毕。

因此, 若 P' 非空, 则由定理 1、2 即可作出 P 被 V 裁剪后的封闭区域边界。但若 P' 空, 还需进一步判断 P 是否包含 V 。此时, 应用“标号法”^[5] 确定 V 的圆心是否在 P 内, 即将笛卡尔坐标系按圆心角划分为 4 个象限: $[0, \frac{\pi}{2}), [\frac{\pi}{2}, \pi), [\pi, \frac{3\pi}{2}), [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, 并分别用标号 0, 1, 2, 3 表示。用 $\alpha(p_i)$ 表示 P 的顶点 p_i 所在象限的标号, 计算 $W = \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{i,i+1}$ (这里 $\delta_{n-1, n} = \delta_{n-1, 0}$), 其中

$$\begin{aligned} & \text{当 } -1 \leq \alpha(p_{i+1}) - \alpha(p_i) \leq 1 \\ & \text{当 } \alpha(p_{i+1}) - \alpha(p_i) > 2 \\ & \text{当 } \alpha(p_{i+1}) - \alpha(p_i) < -2 \\ & \text{当 } \alpha(p_{i+1}) - \alpha(p_i) = \pm 2 \end{aligned}$$

3 算法描述

设圆形窗口 V 的参数方程为:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (1)$$

简单多边形 P 的边 $\widehat{p_i p_{i+1}} (i=0, 1, \dots, n-1)$;

$p_n = p_0$, 用参数方程表示为:

$$\begin{cases} x = x_i + (x_{i+1} - x_i)t \\ y = y_i + (y_{i+1} - y_i)t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (2)$$

则在 P 与 V 的交点处, 参数 θ, t 满足:

$$\begin{cases} x_i + (x_{i+1} - x_i)t = R \cos \theta \\ y_i + (y_{i+1} - y_i)t = R \sin \theta \end{cases}$$

消去 θ 后得:

$$A_i t^2 + 2B_i t + C_i = 0 \quad (3)$$

其中, $A_i = (x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2$,

$$B_i = x_i(x_{i+1} - x_i) + y_i(y_{i+1} - y_i), C_i = x_i^2 + y_i^2 - R^2,$$

在式(3)中, 令 t 的一元二次方程的判别式 $\Delta_i = B_i^2 - A_i C_i$.

3.1 新顶点表 P' 的形成

设 $p_i p_{i+1}$ 所在的直线为 l . p 的边 $p_i p_{i+1}$ 被 V 裁剪时, P' 的建立过程如下:

若 $\Delta_i < 0$, 则式(3)无实根, l 与 V 不相交, 故 $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$ 与 V 不存在交点且在 V 外. 此时, 没有点链入 P' .

若 $\Delta_i = 0$, 则式(3)有两重根, l 与 V 相切, 由定义 2, 没有点链入 P' .

若 $\Delta_i > 0$, 则式(3)有 2 个互异的实根 t_1 和 t_2 , 即

$$\begin{cases} t_1 = (-B_i - \sqrt{\Delta_i})/A_i \\ t_2 = (-B_i + \sqrt{\Delta_i})/A_i \end{cases}$$

显然 $t_1 < t_2$. 此时, l 与 V 存在 2 个交点, 其交点坐标由 t_1, t_2 分别代入 l 的参数方程

$$\begin{cases} x = x_i + (x_{i+1} - x_i)t \\ y = y_i + (y_{i+1} - y_i)t \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

得到. 记两交点分别为 p_{t_1} 和 p_{t_2} .

(1) 当 $t_1 < 0$ 时, 若 $t_2 \leq 0$, 则 $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$ 在 V 外, 没有点链入 P' ; 若 $0 < t_2 \leq 1$, 则由定义 2, $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$ 的端点 p_i 在 V 内, p_{i+1} 在 V 外, 故 $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$ 与 V 仅有一个交点 p_{t_2} 即 $p_{(i+1)出}$, 此时将 $p_i, p_{(i+1)出}$ 依次链入 P' ; 若 $t_2 > 1$, 则 $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$ 在 V 内, 将 p_i 链入 P' . 如图 3(a) 所示.

(2) 当 $0 \leq t_1 < 1$ 时, 若 $0 < t_2 \leq 1$, 则由定义 2, $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$ 与 V 存在 2 个交点 p_{t_1} 即 $p_{i入}, p_{t_2}$ 即 $p_{(i+1)出}$, 将 $p_{i入}$ 和 $p_{(i+1)出}$ 依次链入 P' ; 若 $t_2 > 1$, 则 $(\overrightarrow{p_i p_{i+1}})$ 的端点 p_i 在 V 外, p_{i+1} 在 V 内, 故 $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$ 与 V 仅有一个交点 p_{t_1} 即 $p_{i入}$, 将 $p_{i入}$ 链入 P' . 如图 3(b) 所示.

(3) 当 $t_1 \geq 1$ 时, 必有 $t_2 > 1$, $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$ 在 V 外, 没有点链入 P' . 如图 3(c) 所示.

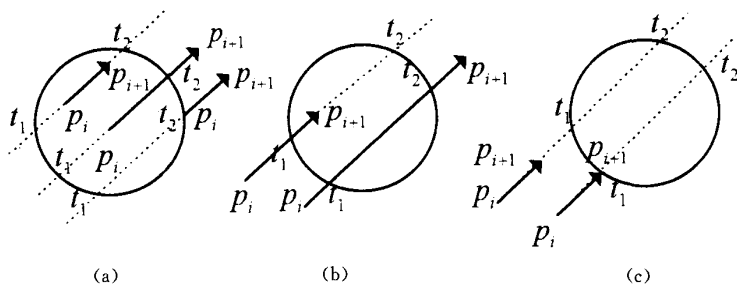
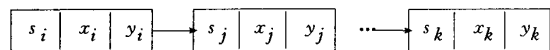


图 3

因此, 若对 P 的每条边, 按顺时针方向重复上述步骤即完成了新顶点表 P' 的建立.

根据定理 1、2, 在将某点链入 P' 时, 需标记顶点性质, 为此, 将 P' 的数据结构定义为:



其中: (x_u, y_u) ($u = i, j, \dots, k$) 表示 P' 中的顶点坐标, s_u 表示 (x_u, y_u) 的标志值; $s_u = 0$ 表示 (x_u, y_u) 为入边交点; $s_u = 1$ 表示 (x_u, y_u) 为出边交点; $s_u = 2$ 表示 (x_u, y_u) 为 P 在 V 内的顶点.

3.2 作出裁剪区域

当 P' 非空时, 根据定理 1 作出裁剪区域在 V 内的边界, 并从 P' 中取出入、出边交点, 依据定义 3 分别放入 $P_{交左}$ 和 $P_{交右}$. 若 $P_{交左}$ 和 $P_{交右}$ 均为空, 算法结束; 否则, 由 $P_{交左}$ 和 $P_{交右}$ 形成 $P_{交}$, 根据定理 2, 作出裁剪区域在 V 边线上的边界.

当 P' 空时, 计算 $W = \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{i,i+1}$, 根据定理 3, 若 $W \neq 0$, 则作出 V 的边线; 否则, 不存在裁剪区域.

4 算法分析

根据定理 1、2,该算法能够正确地作出 P 与 V 的裁剪区域。由于圆形窗口 V 通常总是要作出的,此时仅由定理 1 即可确定裁剪区域,又因求得 P' 的时间为 $O(n)$,所以,算法在这种情况下时间复杂度为 $O(n)$ 且达到最优。若不作出窗口 V ,需再由定理 2 确定裁剪区域在 V 边线上的边界,由于 $P_{交左}$ 或 $P_{交右}$ 中交点个数一般远远小于 n ,故形成 $P_{交}$ 的时间可视为 $O(1)$,此时算法时间复杂度仍为 $O(n)$ 。

一般情况下,圆形窗口 V 与简单多边形 P 存在交点,即新顶点表 P' 非空。

本算法已用 C 语言编程实现,且经算例验证,



杜玉越 副教授。1991 年南京航空航天大学获硕士学位。主要从事算法理论分析与设计,图形学,CAD 等方面的教学和研究工作。



曹德范 副教授。目前主要从事图形学,CAD 等方面的研究工作。

参考文献

- 1 Sutherland I E, Hodgman G W. Reentrant Polygon Clipping. Comm. ACM, 1974, 17(1).
- 2 Weiler K J, Atherton P R. Hidden Surface Removal Using Polygon Area Sorting. Computer Graphics, 1977, 11(2).
- 3 帕夫利迪斯. T. 计算机图形显示和图象处理的算法. 吴成柯译. 北京:科学出版社,1987.
- 4 姚涵珍,宋鹏,张国安. 圆形窗口裁剪算法的研究与实践. 计算机辅助设计与图形学学报, 1992, 4 (3).
- 5 金廷赞. 计算机图形学. 杭州:浙江大学出版社,1988.

Polygon Clipping Against A Circular Window

Du Yuyue, Cao Defan

(Department of Computer Science, Liaocheng Teachers University, Shandong 252059)

Abstract A simple and practical clipping algorithms for a polygon P is offered based on a circular window V . It considers the edges of the polygon as directed lines, and studies the problem of deciding the area edge of P clipping by V , based on the intersection point concept of in-edges and out-edges of the polygon vertices. The theorems about what is the inner part of the polygon P within a circular window V are presented.

Keywords Computer graphics, Circular window, Polygon, Clipping

欢迎订阅《中国体视学与图像分析》杂志

《中国体视学与图像分析》是中国体视学学会主办的国内外公开发行的国家一级刊物,是国内第一家有关体视学与图像分析的学术性期刊。坚持实事求是的科学态度和理论与实践相结合的学风,从国内学科发展的实际情况出发,本着提高为主,提高与普及相结合的办刊方针,重点传播代表我国学术水平的科研新成果、新经验和新技术。设置有专家述评、论著、讲座、专题讨论、研究简报、短篇报道、国内和国际学术活动和会议纪要等栏目。刊登主要内容为有关体视学和图像分析学术性基础理论研究,综述性和评述性论著、新方法、新技术、新仪器、新设备及不同时期的专题论述、评述和讲座等;各不同专业和科技领域,应用体视学与图像分析方法和技术所完成的研究工作的论著;各相关领域的进展和动态;选择国外优秀杰出的论著。主要面向的读者为生物学、医学等生命科学及钢铁、矿冶、石油、地质等材料科学领域的从事体视学与图像分析的研究人员以及各大院校,各级医院应用体视学与图像分析方法的科技工作者。

《中国体视学与图像分析》杂志为季刊、大 16 开本,每期售价为 7.50 元(含邮寄费),全年 30 元,1999 年第 4 卷现在已开始办理订阅。